

## Simulação do Transporte de Escalares em Corpos d'Água Rasos Usando um Modelo de Grades Não Estruturadas

Fábio Farias Pereira\*, Carlos Ruberto Fragoso Júnior\*, Walter Collischonn\*, David da Motta Marques\*  
fabio.pereira@tvrl.lth.se, crubertofj@hotmail.com, collischonn@iph.ufrgs.br, dmm@iph.ufrgs.br

Recebido: 10/10/09 – revisado: 30/03/10 – aceito: 14/11/12

---

### RESUMO

Rios e lagos são regiões em que é comum a existência de áreas urbanas e de alta densidade populacional, que se utilizam do água para abastecimento, transporte, lazer e para diluição de poluentes. Em função disso são frequentes os problemas relacionados à qualidade da água neste tipo de sistema. A eutrofização e as florações de algas são problemas que vem acontecendo, por exemplo, no rio Guaíba, no Rio Grande do Sul. Modelos matemáticos são largamente utilizados para entender os padrões de fluxo e o transporte de substâncias nestes ecossistemas. Neste trabalho, desenvolveu-se um modelo hidrodinâmico e de transporte de poluentes bidimensional para corpos d'água rasos que está baseado numa subdivisão do corpo d'água em uma grade não estruturada. O modelo é formado por dois módulos: hidrodinâmico e de transporte de massa. O módulo hidrodinâmico é baseado nas equações de Navier-Stokes com aproximações para corpos d'água rasos. O módulo de transporte de massa representa o transporte de um escalar passivo e conservativo sob influência dos processos físicos do meio, como a concentração de uma substância. Este artigo apresenta uma aplicação do modelo ao rio Guaíba, incluindo a região do delta do Rio Jacuí, com sua intrincada rede de canais e ilhas. Foram testadas duas formas de solução da equação de transporte: uma baseada num esquema numérico de diferenças centrais e outra baseada num esquema de alta resolução. Foram realizados testes de conservação de volume comparando os resultados obtidos com resultados obtidos via a solução analítica das mesmas equações. Os resultados mostram a adequação da discretização em grades não estruturadas para representar a complexa hidrografia do delta do rio Jacuí, e os testes de conservação de massa mostram que os erros são insignificantes para os dois esquemas numéricos, entretanto o segundo esquema de alta resolução apresenta vantagens na redução da difusão numérica.

**Palavras-Chave:** Transporte de escalares; corpos d'água rasos.

---

### INTRODUÇÃO

Ecossistemas aquáticos continentais, tais como rios, lagos e estuários, abrigam grande diversidade de seres, incluindo algas, bactérias, macrófitas, artrópodes (crustáceos e insetos) e vertebrados (NELSON, 1994). Estes ecossistemas são geralmente localizados na vizinhança imediata de grandes centros urbanos por oferecerem uma vasta gama de atividades socio-econômicas tais como abastecimento, diluição de efluentes, irrigação, navegação e recreação (SOUZA e KJERVE, 1997; ROBSON e NEAL, 1997; MATSON et al., 1997).

A ecologia das mais variadas espécies em lagos e estuários está intimamente ligada aos fatores físicos e especialmente às variáveis hidrodinâmicas, como a velocidade, a turbulência e a difusão e com

vecção de material suspenso (REYNOLDS, 1984). Entender os processos bioquímicos e biológicos relacionados ao crescimento algal e a sua interação com os nutrientes requer, fundamentalmente, o conhecimento prévio da hidrodinâmica do sistema (FRAGOSO JR., 2005). A circulação da água influencia diretamente a distribuição espacial dos nutrientes e poluentes, bem como a dinâmica dos parâmetros de qualidade da água, como OD, DBO, pH, coliformes fecais e do fitoplâncton (REYNOLDS, 1994). Nesse sentido, é necessário um esforço de otimização entre as aptidões do meio ambiente e a exploração humana através de uma gestão racional (COUTINHO, 1986), onde toda a interferência externa, assim como o comportamento hidrodinâmico, químico e biológico dentro do sistema sejam cuidadosamente estudados, simulados, observados e monitorados com continuidade para evitar o desequilíbrio ambiental nesses corpos d'água.

Ao lado da oscilação natural do nível da água, conhecido como hidroperíodo (FRAGOSO JR.,

---

\*Instituto de Pesquisas Hidráulicas/UFRGS

2005), a circulação da água desempenha um papel de fundamental importância na estrutura e no funcionamento de ecossistemas aquáticos, sendo responsável pelo transporte de nutrientes, biomassa de organismos, sedimentos e outros constituintes (PAZ, 2003; IMBODEN, 2004). A hidrodinâmica deste tipo de sistema é complexa e depende de vários parâmetros que variam no tempo e no espaço tais como densidade, temperatura, vento e pressão. Devido a essa variabilidade, ecossistemas aquáticos são providos dos mais variados organismos em ambientes físicos distintos (IMBODEN, 2004). Com o intuito de melhor gerenciar esses ecossistemas avaliando seus usos, disponibilidade e preservação, faz-se necessário o uso de metodologias que melhor descrevam esses processos (TUCCI, 2005). Uma das metodologias, amplamente difundida na quantificação, permitindo um melhor entendimento da dinâmica no ecossistema, é a modelagem hidrodinâmica e de transporte de massa.

Modelos que representam a dinâmica do escoamento e do transporte de escalares em águas rasas vêm sendo sistematicamente desenvolvidos (CHENG et al., 1993; CASULI e CHENG, 1992; FRAGOSO JR., 2005; CHAPRA, 1997). A maioria destes modelos representa o campo de escoamento em um plano formado por uma grade estruturada regular (i.e. uniforme). No entanto, grades ortogonais estruturadas não são suficientemente flexíveis para representar lagos com contornos complexos e arbitrários. Por outro lado, o uso de malhas não-estruturadas para discretização de domínios está cada vez mais presente nos métodos numéricos (MALISKA e VASCONCELLOS, 2000). A facilidade de adaptação destas malhas em geometrias complexas permite a elaboração de refinamentos locais em regiões específicas. Com isso, os esforços computacionais podem ser concentrados em áreas de interesse reduzindo a densidade da malha nas demais áreas.

Este trabalho apresenta alguns testes de um modelo hidrodinâmico para rios, lagos e estuários, baseado em uma discretização em grade não estruturada. O modelo serve para: (i) representar a hidrodinâmica do sistema através de determinação dos fluxos quantitativos do meio; (ii) estimar a dinâmica de nutrientes, modelando os mecanismos de transporte das substâncias. O desempenho numérico do modelo hidrodinâmico e de transporte de nutrientes foi avaliado através de testes de conservação de volume de água e de massa de um escalar genérico conservativo.

### Grade Não Estruturada

Uma grade não estruturada ortogonal consiste em um conjunto de polígonos convexos não sobrepostos em um determinado domínio. Cada lado de um polígono pode ser uma linha de borda ou um lado de um polígono adjacente (CASULI e WALTERS, 2000). Além disso, é assumido que em cada polígono existe um ponto onde um segmento de reta liga os centros de dois polígonos adjacentes e que o centro do polígono não necessariamente coincide com seu centro geométrico. Esta reta intercepta o lado comum aos dois polígonos de forma ortogonal. Esta malha é então conhecida como uma grade não estruturada ortogonal (CASULI e WALTERS, 2000; CHENG e CASULI, 2001).

A discretização de uma malha ortogonal não-estruturada com  $N_p$  polígonos e  $N_s$  faces é apresentada na Figura 1. Cada polígono contém um número arbitrário de faces  $S_i \geq 3$ , onde  $i = 1, 2, \dots, N_p$ . As faces de um polígono são identificadas pelo índice  $j(i,l)$ , onde  $l=1, 2, \dots, S_i$ , tal que  $1 \leq j(i,l) \leq N_s$ . Dois polígonos que compartilham a mesma face são identificados pelos índices  $i(j,1)$  e  $i(j,2)$ , tal que  $1 \leq j(i,1) \leq N_p$  e  $1 \leq j(i,2) \leq N_p$ . A área do polígono  $i$  é dada por  $P_i$  e a distância não nula entre os centros de dois polígonos adjacentes, para uma face  $j$  de comprimento  $\lambda$ , é dada por:  $\delta$ .

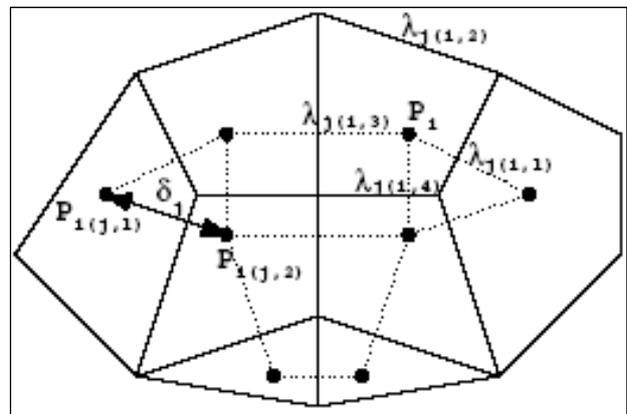


Figura 1 - Grade não-estruturada ortogonal (CASULI, 2002).

### Descrição do Modelo

O modelo foi desenvolvido em dois módulos: hidrodinâmico e de transporte de massa. O módulo hidrodinâmico simula as variáveis que controlam a circulação e o fluxo (velocidade e elevação

da superfície da água). O módulo de transporte de massa estima a dinâmica de escalares, modelando o transporte de massa dos constituintes do sistema (nutrientes, sedimentos, poluentes, etc).

*Módulo hidrodinâmico*

São conhecidos por modelos hidrodinâmicos aqueles modelos matemáticos que utilizam as equações que descrevem o movimento dos fluidos ou seja, as equações de Navier-Stokes.

As equações de águas rasas são deduzidas a partir das equações de Navier-Stokes, sendo compostas pelas equações da quantidade de movimento e pela equação da continuidade, as quais juntas formam um sistema de equações diferenciais parciais (Eq. 1 a Eq. 3) caPAZ de representar o comportamento hidrodinâmico bidimensional em ecossistemas aquáticos rasos (CASULI e ZANOLLI, 2002).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -g \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \gamma \cdot u + \tau_x + f \cdot v + A_h \cdot \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -g \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \gamma \cdot v + \tau_y - f \cdot u + A_h \cdot \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial [(h+z) \cdot u]}{\partial x} + \frac{\partial [(h+z) \cdot v]}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

onde  $u(x,y,t)$  e  $v(x,y,t)$  são as componentes da velocidade na horizontal e na vertical,  $t$  é o tempo,  $z(x,y,t)$  é a elevação do nível de água medida a partir do nível de referência,  $A_h$  é o coeficiente de viscosidade turbulenta horizontal,  $h(x,y)$  é a altura medida a partir do solo ao nível de referência,  $g$  é a constante de aceleração gravitacional,  $\tau_x$  e  $\tau_y$  são a tensão de cisalhamento do vento nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $\gamma$  é o coeficiente de fricção do fundo e  $f$  é o parâmetro de Coriolis assumido constante. As acelerações devido à força de Coriolis usadas nas equações do momento são dadas por  $f \cdot v$  and  $-f \cdot u$ , respectivamente, com  $f = 2\Omega \sin \Phi$  onde  $\Omega$  é a

velocidade angular da Terra sobre seu proprio eixo e  $\Phi$  é a latitude.

O coeficiente de fricção do fundo pode ser calculado por:

$$\gamma = \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C_z^2 H} \quad (4)$$

onde  $H(x,y,t) = h(x,y) + z(x,y,t)$  é a profundidade total da lâmina d'água e  $C_z$  é o coeficiente de rugosidade de Chezy.

Na maioria dos modelos hidrodinâmicos, a tensão de cisalhamento na superfície livre é diretamente proporcional a velocidade do vento (FRAGOSO JR., 2005). Neste modelo, a tensão de cisalhamento nas direções  $x$  e  $y$  são calculadas por:

$$\tau_x = C_D W_x \|W\| \quad (5)$$

$$\tau_y = C_D W_y \|W\| \quad (6)$$

sendo  $C_D$  o coeficiente de arraste,  $W_x$  e  $W_y$  as componentes horizontais e verticais da velocidade do vento e  $\|W\|$  a norma do vetor velocidade do vento. ( $\|W\| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$ )

*Módulo de transporte*

A equação de transporte de uma substância escalar dissolvida na água de forma homogênea (CHAPRA, 1997) pode ser deduzida a partir da lei da conservação da massa e expressada conforme a equação abaixo:

$$\frac{\partial(HC)}{\partial t} + \frac{\partial(uCH)}{\partial x} + \frac{\partial(vCH)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_h \frac{\partial(HC)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_h \frac{\partial(HC)}{\partial y} \right) + fontes \quad (7)$$

onde  $C$  é a concentração escalar média na vertical em mg/L;  $H$  é a profundidade em metros;  $u$  e  $v$  são as velocidades médias horizontais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, em m/s; e  $K_h$  é a difusividade escalar horizontal em m<sup>2</sup>/s.

Na discretização da equação de transporte foram empregados e comparados dois esquemas com aproximações numéricas distintas: (a) um esquema de diferenças centrais (CHAPRA,1997) e (b)

um esquema de alta resolução (SWEBY, 1984). Ambos os esquemas consideram o transporte de escalar conservativo, ou seja, sem termos de perdas ou ganhos de massa como, por exemplo, um termo de decaimento ou sedimentação.

#### Esquema de diferenças centrais

O esquema mais usado na modelagem da costa oceânica e estuarina é o de diferenças centrais (CASULI, 1990) por ser eficiente e de fácil implementação. Utilizando a equação da continuidade e assumindo que as funções envolvidas na equação do transporte são diferenciáveis, a discretização numérica da equação do transporte, em uma grade não estruturada pode ser dada pela Eq. 8.

$$P_i H_i^{n+1} C_i^{n+1} = P_i H_i^{n+1} C_i^n - \Delta t \left[ \sum_{j \in S_i^+} |Q_j^n| C_i^n - \sum_{j \in S_i^-} |Q_j^n| C_{m(i,j)}^n \right] + \Delta t \sum_{j \in S_i^+ \cup S_i^-} D_j^n [C_{m(i,j)}^n - C_i^n] \quad (8)$$

em que  $n$  e  $n+1$  representam a discretização temporal do esquema,  $j$  é o índice que referencia os lados do  $i$ -ésimo polígono na malha,  $S_i^+$  trata-se da série de lados pertencentes ao  $i$ -ésimo polígono que fazem o  $i$ -ésimo polígono perder massa, enquanto que  $S_i^-$  é a série de lados que agregam massa ao  $i$ -ésimo polígono e  $Q_j^n = \lambda_j H_i^n u_j^n$  e  $D_j^n = \lambda_j H_i^n \frac{K_j^h}{\delta_j}$  são os coeficientes dos fluxos advectivos e difusivos, respectivamente. O índice  $m(i,j)$  indica a concentração de um escalar do polígono que compartilha o mesmo lado  $j$  com o  $i$ -ésimo polígono.

O resultado da solução numérica de  $C_i^{n+1}$  pode gerar novos valores mínimos e máximos de concentração de um escalar, o que pode levar a valores sem significado físico (max-min property). Este problema pode ser resolvido quando se agrega o ponderador  $\theta$  na discretização do coeficiente de fluxo advectivo, deixando-o semi-implícito. Assim, a vazão através de um lado  $j$  na malha pode ser calculada semi-implicitamente como

$$Q_j^{n+\theta} = \lambda_j H_j^n u_j^{n+\theta} \text{ onde}$$

$$u_j^{n+\theta} = (1-\theta)u_j^n + (\theta)u_j^{n+1}.$$

Introduzindo a equação da continuidade para manter o esquema conservativo, a solução numérica da equação de transporte segundo um es-

quema de diferenças centrais semi-implícito é apresentada conforme a equação abaixo:

$$P_i H_i^{n+1} C_i^{n+1} = P_i H_i^n C_i^n - \Delta t \left[ \sum_{j \in S_i^+} |Q_j^{n+\theta}| C_i^n - \sum_{j \in S_i^-} |Q_j^{n+\theta}| C_{m(i,j)}^n \right] - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in S_i^+ \cup S_i^-} \Phi_j^n |Q_j^{n+\theta}| [C_{m(i,j)}^n - C_i^n] + \Delta t \sum_{j \in S_i^+ \cup S_i^-} D_j^n [C_{m(i,j)}^n - C_i^n] \quad (9)$$

#### Esquema de alta resolução

Esquemas numéricos constituídos por diferenças finitas de alta ordem podem fornecer soluções fisicamente incorretas em escoamentos complexos não satisfazendo a condição de entropia (LOMAX et al., 2000). Uma das formas utilizadas para produzir soluções únicas e com alta resolução é desenvolver esquemas numéricos não lineares que empreguem o conceito de diminuição (ou limitação) das variações totais.

Neste trabalho, um esquema de alta resolução foi desenvolvido seguindo a formulação proposta por Sweby (1984). Tal formulação propõe agregar um limitador de fluxo ( $\Phi$ ) na discretização da equação do transporte, levando a seguinte aproximação numérica:

$$P_i H_i^{n+1} C_i^{n+1} = P_i H_i^n C_i^n - \Delta t \left[ \sum_{j \in S_i^+} |Q_j^{n+\theta}| C_i^n - \sum_{j \in S_i^-} |Q_j^{n+\theta}| C_{m(i,j)}^n \right] - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in S_i^+ \cup S_i^-} \Phi_j^n |Q_j^{n+\theta}| [C_{m(i,j)}^n - C_i^n] + \Delta t \sum_{j \in S_i^+ \cup S_i^-} D_j^n [C_{m(i,j)}^n - C_i^n] \quad (10)$$

onde o termo  $\Phi_j^n$  é uma função limitadora de fluxo. Desta forma, se  $\Phi = 0$ , o esquema é reduzido aos esquemas de diferenças centrais. Um esquema de diferença central de segunda ordem é admitido nas faces em que  $\Phi = 1$ . É um esquema de primeira ordem, porém menos difusivo, é aplicado quando  $\Phi = 2$ .

#### Aplicação do Modelo

Neste trabalho é apresentada uma aplicação do modelo de grades não estruturadas no rio Guai-

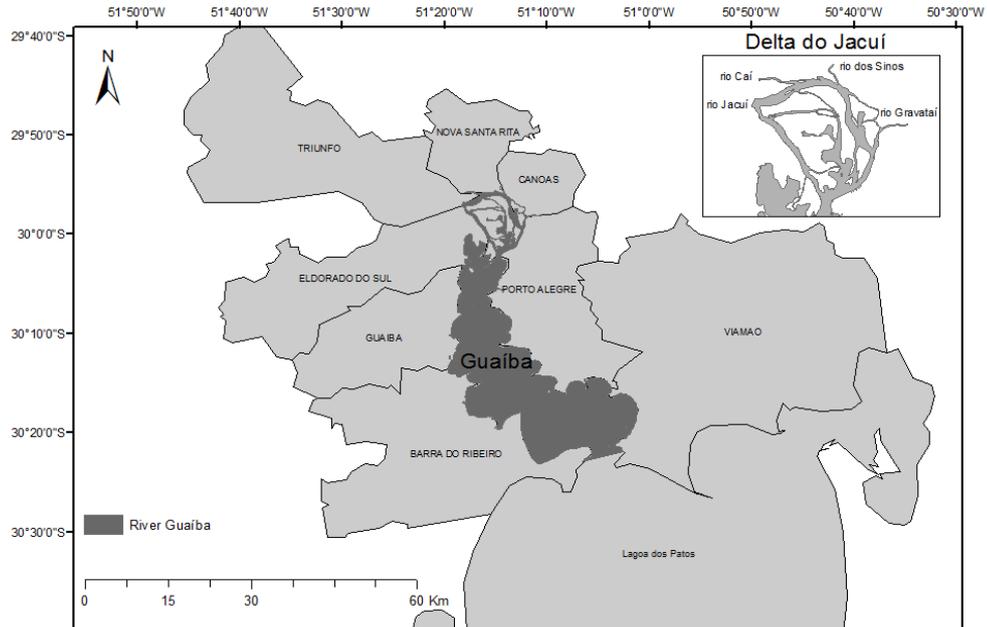


Figura 2 - Localização do rio Guaíba e seus afluentes.

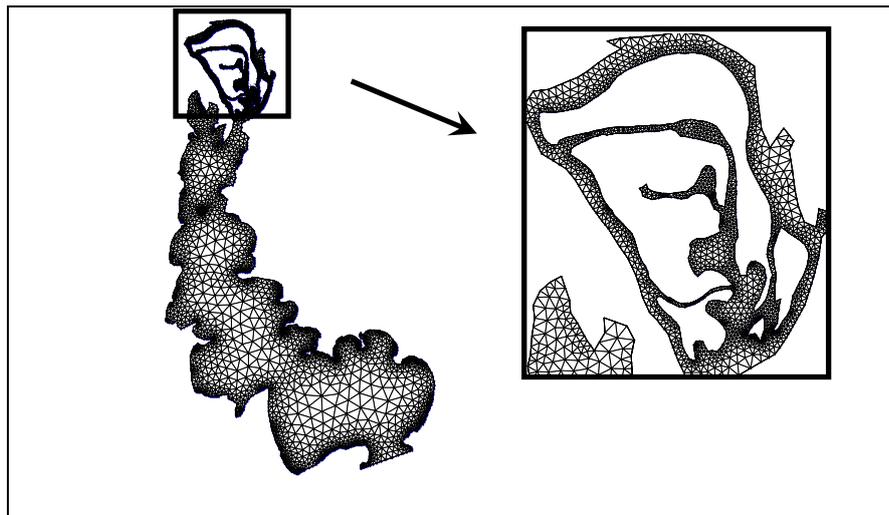


Figura 3 - Discretização espacial do delta do Jacuí com uma malha triangular.

ba e uma discussão sobre a capacidade de previsão dos padrões de circulação de água e de avaliação dos impactos do lançamento de uma carga poluidora.

*Rio Guaíba – Local de Estudo*

Com uma extensão de aproximadamente 50 km e seções com larguras de até 15 km, o rio Guaíba deságua na Lagoa dos Patos e está localizado entre os meridianos 50° e 55° Oeste e paralelos 28° e 35°

Sul (MENEGAT et al., 1998). Trata-se de um dos mananciais de água doce mais importantes do sistema costeiro lagunar do Rio Grande do Sul (i.e. sistema lagunar formado pelo rio Guaíba, Lagoa Mirim e Lagoa dos Patos), principalmente por banhar toda a região metropolitana e por ser o exutório das principais bacias que compõem a Região Hidrográfica do Guaíba (Alto Jacuí, Vacacaí, Pardo-Pardinho, Baixo Jacuí, Taquari, Caí, Sinos e Gravataí) (PRÓ-GUAÍBA, 1998). Tendo a área de drenagem

do rio Jacuí como responsável por aproximadamente 90% da área total de contribuição da bacia hidrográfica do Guaíba. Além disso, é de fundamental importância para o transporte fluvial, irrigação, abastecimento de água e lançamento de efluentes das cidades em seu entorno (Figura 2).

Estuários como o Guaíba são tipicamente centros de população, comércio, indústria, recreação e, conseqüentemente, são alvos de efluentes industriais, agrícolas e esgotos domésticos do município. De acordo com o Plano Diretor do Guaíba dentre os seus principais problemas ambientais estão os esgotos domésticos, os resíduos industriais, o lixo domiciliar e a poluição do ar por fontes industriais e veicular (Pró-Guaíba, 1998). Nas áreas rurais, os problemas mais críticos são a erosão do solo, o assoreamento dos cursos d'água, a contaminação por agrotóxicos e resíduos orgânicos, especialmente dos dejetos animais jogados nos rios. Além disso, o enriquecimento de nutrientes minerais e orgânicos provenientes destes lançamentos aliado à falta de oxigênio no Guaíba são fatores agravantes do processo de eutrofização desse ecossistema (FRAGOSO JR., 2005). Este processo fica evidente no verão devido ao acréscimo da luz solar, provocando excesso de vida vegetal e florações fitoplantônicas no Guaíba.

*Dados de entrada*

O objetivo principal deste trabalho é demonstrar o domínio da técnica de simulação matemática de escoamentos bidimensionais, a elaboração e aplicação do modelo, verificando o comportamento do sistema em alguns cenários distintos, com condições de contorno idealizadas em condições reais do rio Guaíba, ao longo do tempo.

O intervalo de tempo utilizado foi de 60 s, que está dentro do limite de estabilidade numérica. Para o parâmetro  $\theta$ , adotou-se um valor de 0,55 que está na faixa recomendada para as aplicações práticas (CASULI e CATTANI, 1994). Os valores dos coeficientes de viscosidade turbulenta ( $A_h$ ), de difusividade do material transportado ( $K_h$ ) e de arraste do vento ( $C_D$ ) foram de 10 m<sup>2</sup>/s, 5 m<sup>2</sup>/s e 3e-6, respectivamente (FRAGOSO JR., 2009).

As condições de contorno foram estabelecidas de maneira a melhor se aproximar das condições reais. Ao longo das margens, que forma o contorno terra-água do sistema, a condição usada no contorno foi a de fluxo nulo, ou seja, a componente da velocidade normal ao contorno é nula.

Os dados físicos utilizados para a representação do contorno do rio Guaíba no modelo bidimensional de grades não estruturadas são os mes-

mos definidos por Casalas (1984). A malha ortogonal não estruturada usada nas simulações no rio Guaíba foi gerada através de um algoritmo desenvolvido em MATLAB que utiliza as características físicas do sistema (e.g. contorno, batimetria, rugosidade) para gerar os arquivos de entrada do modelo. Trata-se de uma malha triangular contendo 4622 nós, 12156 faces e 7527 triângulos com áreas maiores que 1800 m<sup>2</sup>. O uso de uma malha não estruturada permite a representação detalhada do escoamento no delta do Jacuí (Figura 3).

Não existem dados detalhados e atualizados de batimetria no rio Guaíba. Sendo assim, as profundidades médias de cada elemento triangular contido na malha foram calculadas através de uma interpolação linear feita com base nos dados do levantamento realizado pela Diretoria de Hidrografia e Navegação do Ministério da Marinha em 1964.

A taxa de variação de nível no rio Guaíba é influenciada pela sobreposição de efeitos de ação do vento e seiches. Nesse sentido, a interface entre a Lagoa dos Patos e o rio Guaíba será representada através de uma condição de nível senoidal da seguinte forma:

$$\eta = a \cdot \text{sen}(wt - \pi/2) + a + \eta_0 \tag{11}$$

onde  $\eta$  é o nível d'água acima do plano de referência,  $a$  é a amplitude,  $w$  é a frequência angular e  $\eta_0$  é o nível d'água de repouso acima do plano de referência.

**Tabela 1 - Vazão média afluyente de cada formador do rio Guaíba.**

Rio	Vazão média (m <sup>3</sup> /s)
Jacuí	1.969
Sinos	79
Caí	120
Gravataí	24
Total	2.192

Os dados de velocidade e direção do vento são provenientes de uma estação meteorológica de superfície do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET). Os dados de vento horários foram observados numa estação (lat. 30° 03' e long. 51° 09' 59,7'') localizada na capital, Porto Alegre, numa altitude de 47 m durante todo o mês de março de 2009.

De modo simplificado, a disponibilidade hídrica no Guaíba propriamente dito pode ser estimada como a vazão afluyente dos seus formadores:

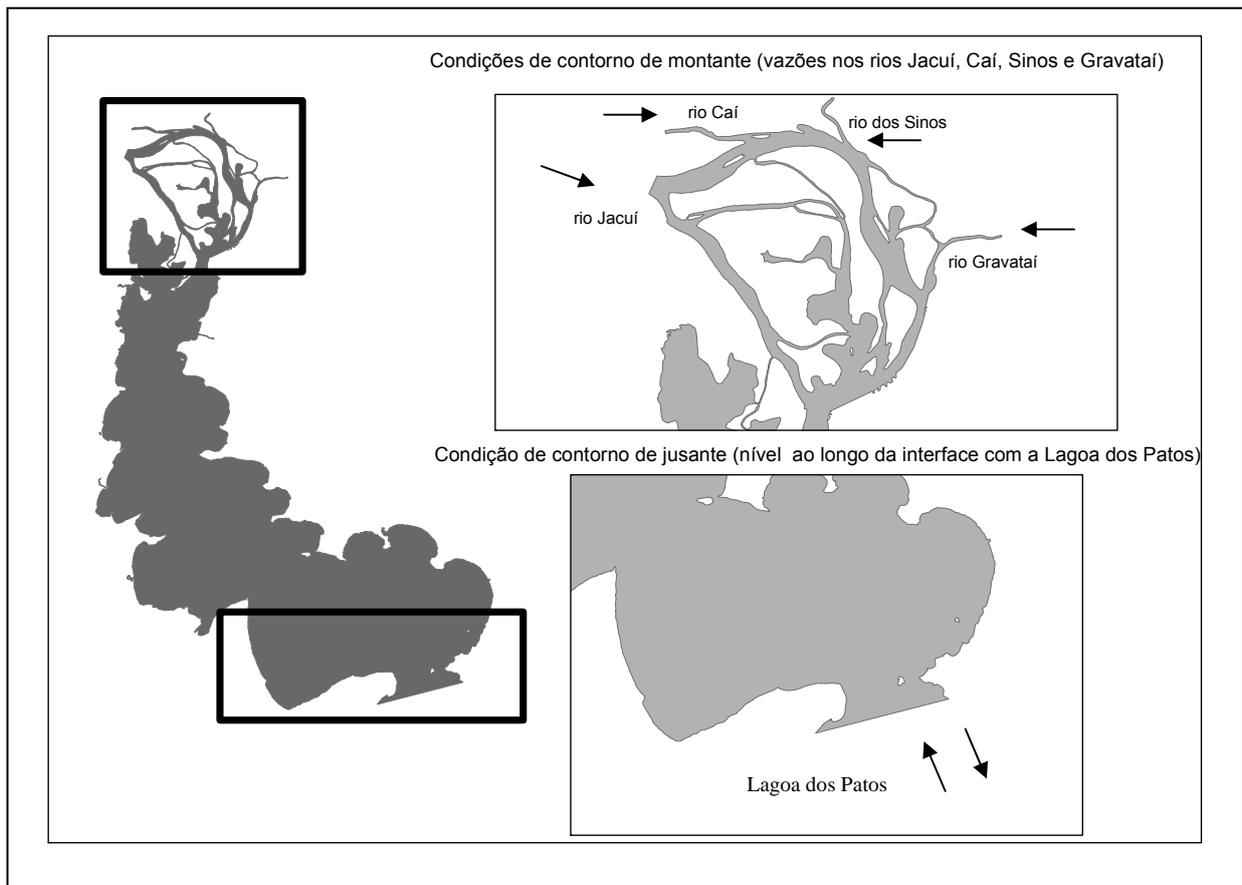


Figura 4 - Figura esquemática das condições de contorno de montante e de jusante nas simulações realizadas no rio Guaíba.

rios Jacuí, Caí, Sinos e Gravataí, cujas vazões médias são apresentadas na Tabela 1 e totalizam  $2.192 \text{ m}^3/\text{s}$ . Com o rio Jacuí sendo responsável por cerca de 90% da vazão de entrada de montante no rio Guaíba (Figura 4).

Um balanço hídrico simplificado foi adotado e incorporado ao modelo. Sendo assim, na malha de cálculo do Guaíba foi adotada condições de contorno de velocidade apenas nas faces que interagem com o rio Jacuí. Como o propósito da aplicação do modelo neste trabalho é verificar o comportamento da hidrodinâmica e transporte de escalar em um ecossistema real e adquirir sensibilidade nos parâmetros de entrada do modelo, não foram consideradas as contribuições dos demais rios formadores nos cenários de simulação. Esta simplificação é razoável, uma vez que o rio Jacuí detém a absoluta maioria do volume de água que entra no Guaíba.

Além disso, foram desprezados os balanços diretos de precipitação e evaporação com o espelho d'água do rio. Estas simplificações não devem ser adotadas em corpos d'água com grandes áreas superficiais ou quando pretende-se simular um longo intervalo de tempo.

## RESULTADOS

Definidas as condições iniciais hidrodinâmicas e de contorno, é possível estabelecer alguns cenários dentro do rio Guaíba para verificar erros numéricos gerados pelo modelo baseado no método dos volumes finitos semi-implícito através da análise da conservação de volume e de massa de um sistema que deveria ser conservativo. Dois cenários foram inicialmente estabelecidos para este estudo.

Na verificação da conservação de massa foram calculadas a diferença percentual entre a quantidade de massa que entra no rio Guaíba em cada passo de tempo ( $V_{ent}$ ) e a diferença entre o total de massa no rio Guaíba no tempo  $n$  e no tempo  $n+1$  ( $V_{inc}$ ). Assim, o erro percentual acumulado no balanço de massa no rio Guaíba é dado da seguinte forma:

$$Erro(\%) = 100 \left( \frac{V_{ent} - V_{inc}}{V_{ent}} \right) \quad (12)$$

Sendo assim, o erro na conservação de massa para cada intervalo de tempo equivale à percentagem de massa de um conservativo que foi criada ou perdida artificialmente, em relação à quantidade de massa que entra no sistema.

No primeiro cenário reproduz-se o Guaíba submetido a um despejo de uma carga permanente de um poluente, constante e com a mesma ordem de grandeza da vazão no rio Jacuí. A concentração inicial do poluente é igual a  $5 \text{ g/m}^3$  definido para cada célula na interface entre o rio Jacuí e o rio Guaíba, enquanto que o restante do domínio apresenta concentração igual a  $1 \text{ g/m}^3$  (Figura 5). Ao longo desta simulação foram monitorados o nível médio de lâmina d'água, o erro na conservação de volume e na conservação de massa.

No primeiro cenário, o esquema de diferenças centrais e o esquema de alta resolução apresentam soluções semelhantes. No entanto, o esquema de alta resolução com limitador de fluxo reduz o transporte de massa nos fluxos em direções as margens e pontais e, por outro lado, aumenta a dispersão da substância na zona pelágica onde prevalecem as maiores velocidades e está localizado o canal de navegação do rio Guaíba. Os erros decorrentes da conservação de volume são suficientemente pequenos para serem considerados no balanço de massa do sistema. O erro acumulado com a conservação de massa usando um esquema de diferenças centrais ao final de 5 dias de simulação no Guaíba foi da ordem de 13%. Enquanto que o transporte de massa representado por um esquema de alta resolução apresentou erro acumulado máximo de 7% (Figura 6). Em outras palavras, o esquema de alta resolução mostrou-se mais conservativo que o esquema de diferenças centrais para o caso de um lançamento permanente de um efluente no Jacuí. No entanto, os erros calculados em ambos os esquemas são irrelevantes se comparados com o coeficiente de decaimento de sedimentação ou a taxa de decrescimento microbriano que podem atingir de 60% (e.g. taxa de perdas

de fitoplâncton devido ao consumo por zooplâncton) a 80% (e.g. taxa de decaimento de fitoplâncton por respiração algal) (CHAPRA, 1997), tornando-os viáveis para aplicações em sistemas reais.

No segundo, considerou-se um cenário em que a água do rio Guaíba encontra-se inicialmente limpa e recebe uma forte contribuição de vazão do rio Jacuí, com alta concentração de material suspenso por um período de 10 horas. Em pouco mais de 3 dias de simulação submetidos em sua grande parte a escoamentos turbulentos e com alta velocidade encontrados no delta do Jacuí, o esquema de alta resolução apresentou uma maior dispersão de poluente que o esquema de diferenças centrais. No final da simulação o pulso do poluente conservativo é diluído ao atingir a zona de convergência do delta do Jacuí. Uma melhor forma de visualizar a diferença entre os esquemas é monitorando a concentração do poluente em determinado ponto. Os índices de concentração foram acompanhados no centro de uma célula localizada em um dos canais do delta do Jacuí (Figura 7).

O esquema de alta resolução apresenta uma ascensão da curva de concentração do pulso de efluente mais íngreme que a observada no outro esquema e reduz a dispersão numérica mantendo um pico achatado e próximo à concentração máxima ( $5 \text{ g/m}^3$ ) lançada no corpo d'água. Outra característica do esquema de alta resolução é que a base da curva de concentração é menor que a do esquema de diferenças centrais, sendo reflexo da função limitadora de fluxo que suaviza o transporte de substâncias quando há grandes gradientes de concentração no esquema de alta resolução. As diferenças ficam ainda mais evidentes ao adotar pontos de monitoramento mais a jusante.

Como apenas as condições de contorno de concentração foram alteradas, tanto a conservação de volume quanto o nível médio no Guaíba são semelhantes aos calculados no primeiro cenário. No entanto, o balanço de massa no segundo cenário em todo o Guaíba foi realizado e seus resultados são mostrados na figura abaixo.

Para o segundo cenário, o esquema de alta resolução mostrou-se mais eficiente e conservativo que o de diferenças centrais. Ao final de 5 dias de simulação, o erro acumulado na conservação de massa com o esquema de diferenças centrais atinge o dobro do erro calculado com esquema de alta resolução. Outra análise importante que pode ser feita é a comparação entre os erros calculados nos dois cenários simulados.

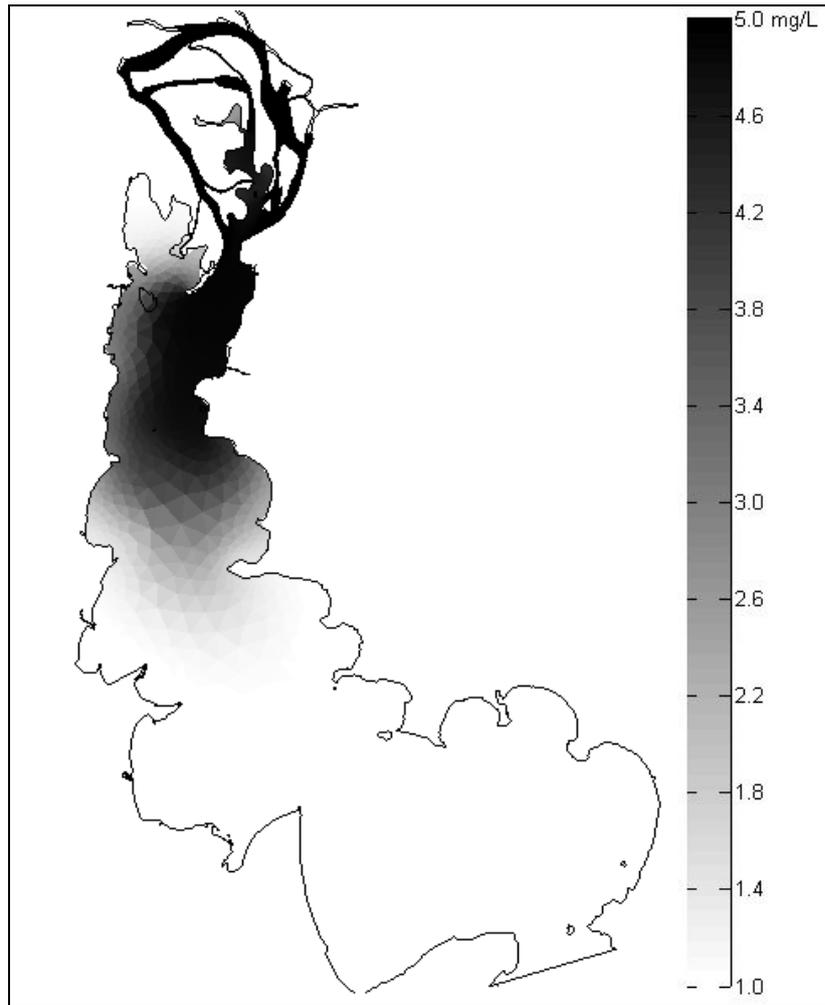


Figura 5 - Mancha de concentração de material suspenso oriundo do rio Jacuí ao final de 5 dias de simulação no rio Guaíba considerando vento observado em março de 2009 usando o esquema com limitador de fluxo.

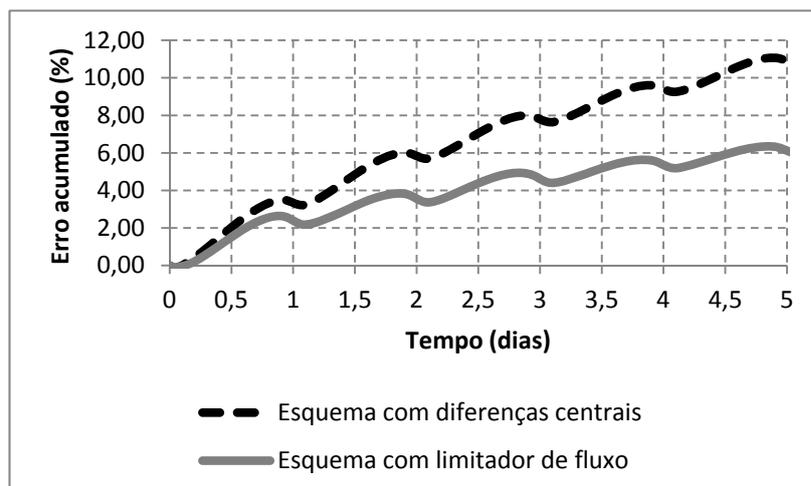


Figura 6 - Comparação entre a conservação de massa com esquema de diferenças centrais e o esquema de alta resolução para o primeiro cenário de simulação do transporte.

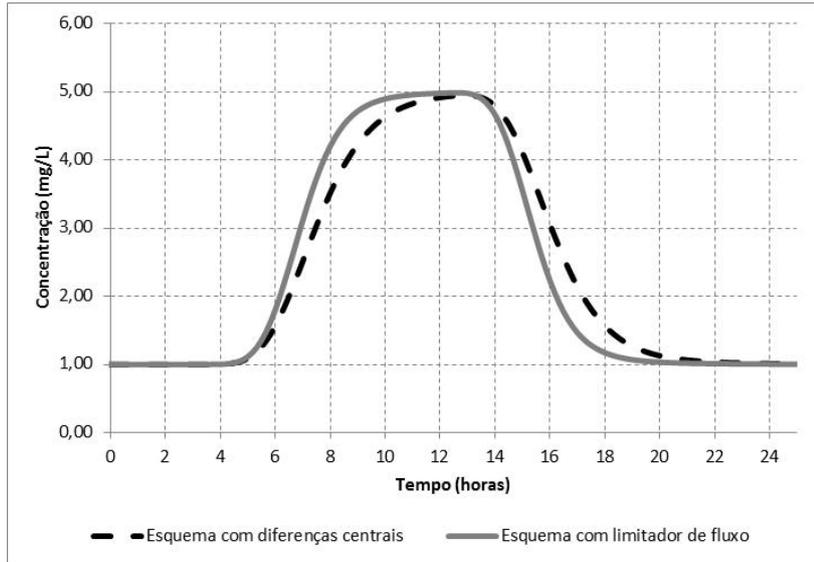


Figura 7 - Conservação de volume para o primeiro cenário de simulação do transporte de massa.

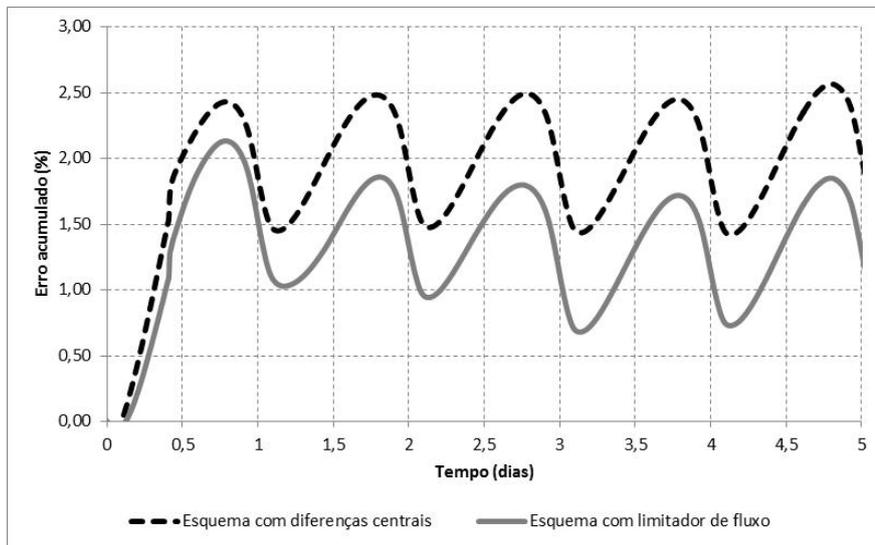


Figura 8 - Comparação entre a conservação de massa com esquema de diferenças centrais e o esquema de alta resolução no segundo cenário de simulação do transporte.

Neste cenário, os erros acumulados de conservação de massa são inferiores aos calculados no primeiro em ambos os esquemas. Isto ocorre pelo fato de que após o lançamento do pulso de efluente, a contribuição de material suspenso no Guaíba é nula. Sendo assim, o resíduo do erro na conservação de massa em cada intervalo de tempo será nulo e não será agregado ao erro acumulado no sistema (Figura 8).

## CONCLUSÃO

Neste trabalho é apresentado um modelo hidrodinâmico e de transporte de escalares bidimensional caPAZ de simular os padrões de circulação de água e o transporte de massa usando grades não estruturadas e o método dos volumes finitos.

Este modelo foi aplicado em um estudo de caso simplificado no rio Guaíba.

O método dos volumes finitos com abordagem Euleriana-Lagrangiana permitiu uma maior flexibilidade no intervalo de tempo de simulação, sem prejudicar a estabilidade da solução hidrodinâmica. Por sua vez, o esquema de alta resolução com limitador de fluxo aplicado para a obtenção da solução de transporte apresentou bons resultados do ponto de vista numérico. A solução numérica desse esquema mantém uma boa precisão mesmo sob situações onde ocorrem elevados gradientes de concentração e em regiões de altas velocidades. O campo de concentrações gerado pelo esquema oscilou entre uma faixa de valor mínimo e máximo de concentração no sistema, satisfazendo princípios físicos. A principal desvantagem desse esquema é a restrição do passo de tempo, que eleva os custos computacionais.

Um ecossistema aquático continental é um meio complexo e repleto dos mais diversos processos físicos, químicos e biológicos nas mais variadas escalas espacial e temporal. Não existem esquemas de solução que contemplem todos esse atributos. Quando uns ou outros processos são privilegiados no modelo, perdem-se alguma das características e qualidade em outro processo.

## REFERÊNCIAS

- CASALAS, A.B. Modelo Matemático de Correntologia do Estuário do rio Guaíba. Relatório Interno IPH. 1984.
- CASULI, V. Semi-implicit Finite Difference Methods for the Two-Dimensional Shallow Water Equations. *Journal of Computational Physics*, v. 86, p. 56-74, 1990.
- CASULI, V.; CATTANI, E. Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 27, p. 99-112. 1994.
- CASULI, V.; CHENG, R. T. Semi-Implicit Finite Difference Methods for Three-Dimensional Shallow Water Flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 15, p. 629-648, 1992.
- CASULI, V.; WALTERS, R. A. An Unstructured Grid, Three-Dimensional Model Based on the Shallow Water Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 32, p. 331-348, 2000.
- CASULI, V.; ZANOLLI, P. Semi-Implicit Numerical Modeling of Nonhydrostatic Free-Surface Flows for Environmental Problems. *Mathematical and computer modelling*, v. 36, p. 1131-1149, 2002.
- CHAPRA, S. C. *Surface water-quality modeling*. McGraw-Hill series in water resources and environmental engineering. Editora: McGraw-Hill. 1997.
- CHENG, R. T.; CASULI, V. Evaluation of the UnTRIM Model for 3-D Tidal Circulation, Proceedings of the 7-th International Conference on Estuarine and Coastal Modeling, Novembro de 2001 p. 628-642.
- CHENG, R. T.; CASULI, V.; GARTNER, J. W. Tidal, Residual, Intertidal Mudflat (TRIM) Model and its Applications to San Francisco Bay, California. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, v. 36, p. 235-280, 1993.
- COUTINHO, P. N. Sugestões para Gerenciamento de Estuários. *Arq. Ciên. Mar. Fortaleza*, p. 77-86, 1986.
- FRAGOSO JR., C. R. *Simulações da Dinâmica de Fitoplâncton no Sistema Ecológico do Taim (RS)*. 2005. Dissertação (Mestrado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental), Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.
- FRAGOSO JR., C. R. *Modelagem Tridimensional da Estrutura Trófica em Ecossistemas Aquáticos Continentais Rasos*. 2009. Tese (Doutorado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental), Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.
- HUEBNER, K.H. The Finite Element Methods for Engineers. New York, Jonh Wiley & Sons. Cap 5, p. 143-145. 1975.
- IMBODEN, D. M. *The Lakes Handbook*, Volume 1: Limnology and Limnetic Ecology. Blackwell Science Ltd. 2004, p. 115-152.
- LOMAX, H.; PULLIAN, T. H.; ZINGG, D. W. *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. 2000. Disponível em: <<http://www.nas.nasa.gov/~pullian/Classes/>>.

MALISKA, C.R.; VASCONCELLOS, J. F. V. An Unstructured Finite Volume Procedure for Simulating Flows with Moving Fronts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Elsevier Science S.A, v. 182, p. 401-420, 2000.

MATSON, P.A.; PARTON, W.J.; POWER, A.G.; SWIFT, M. J. Agricultural Intensification and Ecosystem Properties. *Science*, v. 277, p. 504-509, 1997.

NELSON, J. S. *Fishes of the World*. New York: John Wiley & Sons, 3rd ed, XVII, 1994, p. 600.

PAZ, A. R. *Análise dos Principais Fatores Intervenientes no Comportamento Hidrodinâmico do Banhado do Taim (RS)*. 2003. Dissertação (Mestrado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental), Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

PRÓ-GUAÍBA. Plano diretor da região hidrográfica do Guaíba. 1998.

REYNOLDS, C. S. The ecology of freshwater phytoplankton. Cambridge University Press. 1984, p. 396

REYNOLDS, C. S. The role of fluid motion in the dynamics of phytoplankton in lakes and rivers. In: GILLER, P. S.; HILAREW, A. G.; RAFFAELLI, D. G. *Aquatic ecology – Scale, pattern and process*. Blackwell Science. 1994, p. 649

ROBSON, A.J.; NEAL, C. A Summary of Regional Water Quality of Eastern UK Rivers. *Science of the Total Environment*. v. 194-195, p. 15-37, 1997.

SOUZA, R. C.; KJERVE, B. *Fundamentos da maré e sua Predição*. XX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. Gramado/RS. 1997.

SWEBY, P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, v. 21, p. 995–1011, 1984.

TUCCI, C. E. M. *Modelos hidrológicos*. 2ª ed. Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS/ABRH. 2005.

## ***Simulation of Scalar Transport in Shallow Water Bodies Using an Unstructured Grid Model***

### **ABSTRACT**

*Rivers and lakes are regions with urban areas and high population density. Water quality problems are commonly found in these ecosystems. Eutrophication and algal blooms are some of these water quality issues in River Guaíba. Mathematical models are widely used to represent circulation and scalar transport patterns in these ecosystems. In this work, a two-dimensional hydrodynamic and transport model was developed on unstructured grids. The model is composed of two modules: hydrodynamic and mass transport. The hydrodynamic module is based on the full Navier-Stokes equations with the shallow water approximation applied. The mass transport module represents transport of a passive and conservative scalar induced by physical processes (e.g. pollutant). This paper presents a model application in River Guaíba, including the delta of the River Jacu. Two numerical schemes for solving the advection-diffusion equation were tested: a first-order upwind scheme and a high-resolution scheme. Its application showed that unstructured grid presented high flexibility to represent the shape of the River Guaíba and mass balance errors were considered negligible for both numerical schemes however the high-resolution scheme has advantages in reducing numerical diffusion.*

**Key-words:** *Simulation, water quality, shallow water bodies*